2.2 Soluzione nell'intorno di un punto fuchsiano

In z_0 singolare la soluzione generale **non** può essere regolare, e viceversa: se in z_0 ci sono **due** soluzioni regolari linearmente indipendenti u_1 e u_2 allora $P(z)$ e $Q(z)$ sono regolari. Infatti il sistema

$$\begin{aligned} u_1''(z) + P(z)u_1'(z) + Q(z)u_1(z) &= 0 \\ u_2''(z) + P(z)u_2'(z) + Q(z)u_2(z) &= 0 \end{aligned}$$

permette di ottenere P e Q come rapporto di determinanti nelle funzioni regolari u_1, u_i' e u_i'' $(i = 1, 2)$ con a denominatore il Wronskiano, certo diverso da zero perché u_1 e u_2 sono indipendenti.

Teorema di Fuchs: se z_0 è un punto singolare fuchsiano, esiste sempre **almeno** *una* soluzione del tipo:

$$u_1(z) = (z - z_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \ , \quad \text{con } c_0 \neq 0 \ . \tag{2.39}$$

La seconda soluzione o è ancora della forma (2.39) oppure contiene anche un termine aggiuntivo $du_1 \ln(z - z_0)$, come vedremo nell'eq. (2.45). Le serie che compaiono nella soluzione hanno raggio di convergenza almeno uguale alla distanza fra z_0 e la più vicina singolarità dell'equazione differenziale. Come si determina l'esponente ρ? Supponiamo che z_0 sia un punto singolare fuchsiano. In questo caso le funzioni $P(z)$ e $Q(z)$ possono essere scritte come

$$P(z) = \frac{p(z)}{z - z_0} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} p_l (z - z_0)^l}{z - z_0} \tag{2.40}$$

$$Q(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^2} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} q_l (z - z_0)^l}{(z - z_0)^2} \ , \tag{2.41}$$

dove le funzioni $p(z)$ e $q(z)$ sono regolari in $z = z_0$, e sono state quindi sviluppate in serie di Taylor intorno a z_0. Sostituendo ora le (2.39), (2.40) e (2.41) nell'equazione (2.2) si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k)(\rho + k - 1)(z - z_0)^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho + k) \sum_{l=0}^{\infty} p_l (z - z_0)^{\rho+k+l}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{\infty} q_l (z - z_0)^{\rho+k+l} = 0 \ .$$

Uguagliamo ora a zero il coefficiente della potenza $(z-z_0)^\rho$; poniamo cioè $k=l=0$ nell'equazione precedente. Otteniamo così:

$$c_0[\rho(\rho-1)+\rho p_0+q_0]=0\ ,$$

ovvero, per $c_0\neq 0$,

$$\rho^2+(p_0-1)\rho+q_0=0\ . \tag{2.42}$$

L'equazione (2.42), detta **equazione indiciale** o *caratteristica* dell'equazione differenziale (2.2), è un'equazione di secondo grado in ρ e ha quindi due soluzioni, ρ_1 e ρ_2. Per risolvere l'equazione differenziale occorre quindi risolvere l'equazione indiciale (2.42), dove

$$p_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z)$$

e

$$q_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2Q(z)\ ,$$

e ricavare gli indici ρ_1,ρ_2. Scelti gli indici in modo che $\mathrm{Re}\rho_1\geq\mathrm{Re}\rho_2$ il teorema di Fuchs ci assicura che esiste sempre la soluzione particolare

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k\ ,\quad c_0\neq 0 \tag{2.43}$$

i cui coefficienti si possono determinare in modo univoco in funzione di c_0 sostituendo la serie nell'equazione differenziale e ricavando delle relazioni di ricorrenza. Per risolvere completamente l'equazione differenziale occorre pero' ricavare una seconda soluzione, linearmente indipendente dalla prima. Distinguiamo due casi

1) Se le due radici differiscono per un numero non intero, la seconda soluzione è simile alla prima:

$$u_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k\ ,\quad d_0\neq 0 \tag{2.44}$$

2) Se le due radici ρ_1 e ρ_2 differiscono per un numero intero la seconda soluzione è

$$u_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k+du_1(z)\ln(z-z_0)\ , \tag{2.45}$$

dove d e i d_k (per $k\neq\rho_1-\rho_2$)[1] si determinano per sostituzione in funzione di d_0; può anche succedere che si ottenga $d=0$ ma solo se $\rho_1\neq\rho_2$.

[1] d_n può essere scelto arbitrariamente poiché la differenza fra due soluzioni del tipo u_2 con diversi valori di d_n è proporzionale alla prima soluzione u_1 di (2.43).

2.2.1 Esempio: l'equazione di Bessel

L'equazione di Bessel

$$z^2 u''(z) + z u'(z) + (z^2 - \alpha^2) u(z) = 0 \tag{2.46}$$

ha, come si è già detto, un punto singolare fuchsiano in $z = 0$. L'equazione indiciale è

$$\rho^2 - \alpha^2 = 0 \ ,$$

con soluzioni $\rho_{1,2} = \pm\alpha$. Se $2\alpha \notin \mathbf{Z}$ allora $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbf{N}$ ed entrambe le soluzioni sono della forma

$$u_\rho(z) = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ . \tag{2.47}$$

Sostituendo la (2.47) nella (2.46) si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho)(k+\rho-1) z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho) z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho+2} - \rho^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

da cui

$$c_1 (1+2\rho) z^{1+\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k k (k+2\rho) z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho+2} = 0 \ . \tag{2.48}$$

Se nella prima sommatoria effettuiamo il cambiamento di indice $k \to k-2$ otteniamo:

$$c_1 (1+2\rho) z^{1+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} [c_{k+2} (k+2)(k+2+2\rho) + c_k] z^{k+\rho+2} = 0 \ , \tag{2.49}$$

da cui (essendo $\alpha \neq -1/2$)

$$c_1 = 0 \tag{2.50}$$

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+2+2\rho)} \ . \tag{2.51}$$

Notare che se 2α fosse un intero n, diciamo positivo, la (2.51) non avrebbe senso per $\rho_2 = -\alpha = -n/2$ e per $k = n-2$. Se n è dispari ciò non è grave (basta scegliere tutti i $c_{2l+1} = 0$), ma impedisce di trovare la seconda soluzione nella forma (2.47) se n è pari. Dalla relazione di ricorrenza (2.51) ricaviamo infine che tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli, mentre i coefficienti pari sono:

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{2(2+2\rho)} \\
c_4 &= -\frac{c_2}{4(4+2\rho)} = \frac{c_0}{2\cdot 4(2+2\rho)(4+2\rho)} \\
c_6 &= -\frac{c_4}{6(6+2\rho)} = -\frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 6(2+2\rho)(4+2\rho)(6+2\rho)} \\
c_{2n} &= (-1)^n \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 6 ... 2n(2+2\rho)(4+2\rho)(6+2\rho)...(2n+2\rho)} \ .
\end{aligned}$$

Le **funzioni di Bessel** $J_\alpha(z)$ sono definite come segue:

$$J_\alpha(z) = N_\alpha u_\alpha(z) \ , \tag{2.52}$$

dove N_α è un'opportuna costante di normalizzazione. Nel caso particolare $\alpha^2 = 1/4$ le due soluzioni dell'equazione di Bessel sono

$$\begin{aligned}
J_{1/2}(z) &= N_{1/2}\sqrt{z}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots\right) \\
&= \frac{N_{1/2}}{\sqrt{z}}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) = N_{1/2}\frac{\sin z}{\sqrt{z}} \ .
\end{aligned} \tag{2.53}$$

e

$$J_{-1/2}(z) = N_{-1/2}\frac{\cos z}{\sqrt{z}} \ . \tag{2.54}$$

Notare che $\rho_1 - \rho_2 = 1$ ma non c'è il termine con il logaritmo ($d = 0$). Si può dimostrare che per tutti gli α semi-interi le J_α sono esprimibili tramite funzioni trigonometriche. Per esempio:

$$J_{3/2}(z) = \frac{N_{3/2}}{\sqrt{z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right) \tag{2.55}$$

$$J_{-3/2}(z) = \frac{N_{-3/2}}{\sqrt{z}}\left(-\frac{\cos z}{z} - \sin z\right) \ . \tag{2.56}$$